गणित

पाठ–1 वास्तविक सख्यां

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1

निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए:

(i) 135 और 225 **(ii)** 196 और 38220 **(iii)** 867 और 255

उत्तर 1:

(i) 135 और 225

क्योंकि 225 > 135, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 225 और 135 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$225 = 135 \times 1 + 90$

क्योंकि शेष $90 \neq 0$, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 135 और 90 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$135 = 90 \times 1 + 45$

अब हमारे पास नया भाजक 90 और शेष 45, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग इस में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$90 = 2 \times 45 + 0$

क्योंकि शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 45 है, इसलिए, 135 और 225 का HCF 45 है

(ii) 196 और 38220

क्योंकि 38220 > 196, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 38220 और 196 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$38220 = 196 \times 195 + 0$

क्योंकि शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 196 है, इसलिए, 196 और 38220 का HCF 196 है

(iii) 867 और 255

क्योंकि 867 > 255, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 867 और 255 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$867 = 255 \times 3 + 102$

क्योंकि शेष $102 \neq 0$, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 255 और 102 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$255 = 102 \times 2 + 51$

अब हमारे पास नया भाजक 102 और शेष 51, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग इस में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$102 = 51 \times 2 + 0$

क्योंकि the शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 51 है, इसलिए, 867 और 255 का HCF 51 है।

प्रश्न 2.

दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

उत्तर 2:

माना कोई धनात्मक पूर्णांक a है और $b = 6$।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से, $a = 6q + r$ जहाँ $q \geq 0$, और $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ क्योंकि $0 \leq r < 6$।

इसलिए, $a = 6q$ या $6q + 1$ या $6q + 2$ या $6q + 3$ या $6q + 4$ या $6q + 5$।

अब,

$6q + 1 = 2 \times 3q + 1 = 2k_1 + 1$, जहाँ k_1 एक पूर्णांक है

$6q + 3 = (6q + 2) + 1 = 2(3q + 1) + 1 = 2k_2 + 1$, जहाँ k_2 एक पूर्णांक है।

$6q + 5 = (6q + 4) + 1 = 2(3q + 2) + 1 = 2k_3 + 1$, जहाँ k_3 एक पूर्णांक है।

इसप्रकार,

$6q + 1$, $6q + 3$, $6q + 5$ सभी $2k + 1$ के रूप में हैं, जहाँ k एक पूर्णांक है।

इसलिए, $6q + 1$, $6q + 3$, $6q + 5$ सभी 2 से विभाजित नहीं हैं।

इस प्रकार, ये सभी विषम पूर्णांक हैं और इसलिए, कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है।

प्रश्न 3.

किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है. दोनों समूहों को सामान संख्या वाले स्तम्भों में मार्च करना है. उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमे वे मार्च कर सकते हैं?

उत्तर 3:

उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या HCF (616, 32) से प्राप्त होगी।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 616 और 32 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$616 = 32 \times 19 + 8$

$32 = 8 \times 4 + 0$

इस प्रकार 616 और 32 का HCF 8 है।

इसलिए, वे 8 के स्तम्भों में मार्च कर सकते।

प्रश्न 4.

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए 3m या 3m + 1 के रूप का होता है।
[**संकेत**: यह मन लीजिए x कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब, यह 3q, 3q + 1 या 3q + 2 के रूप में लिखा जा सकता है। इसमें से प्रत्येक का वर्ग कीजिए और दर्शाइए कि इन वर्गों को 3m या 3m + 1 के रूप में लिखा जा सकता है।]

उत्तर 4:

माना कोई धनात्मक पूर्णांक a है और $b = 3$।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $a = 3q + r$ जहाँ $q \geq 0$ और $r = 0, 1, 2$ क्योंकि $0 \leq r < 3$

इसलिए, $a = 3q$ या $3q + 1$ या $3q + 2$

$a^2 = (3q)^2$ या $(3q+1)^2$ या $(3q+2)^2$

$= (3q)^2$ या $9q^2 + 6q + 1$ या $9q^2 + 12q + 4$

$= 3 \times (3q^2)$ या $3 \times (3q^2 + 2q) + 1$ या $3 \times (3q^2 + 4q + 1) + 1$

$= 3k_1$ या $3k_2 + 1$ या $3k_3 + 1$

जहाँ k_1, k_2, और k_3 धनात्मक पूर्णांक हैं।

इस प्रकार, प्रत्येक का वर्ग को 3m या 3m + 1 के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्न 5.

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप में होता है।

उत्तर 5:

मन कोई धनात्मक पूर्णांक है और $b = 3$

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $a = 3q + r$, जहाँ $q \geq 0$ और $0 \leq r < 3$

इसलिए, $a = 3q$ या $3q + 1$ या $3q + 2$

जब $a = 3q$,

$a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = 3q^3$

जब $a = 3q + 1$,

$a^3 = (3q + 1)^3$

$a^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$

$a^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$

$a^3 = 9m + 1$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = (3q^3 + 3q^2 + q)$

जब $a = 3q + 2$,

$a^3 = (3q + 2)^3$

$a^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$

$a^3 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$

$a^3 = 9m + 8$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = (3q^3 + 6q^2 + 4q)$

इसलिए, किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप में होता है।

गणित

पाठ–1 वास्तविक संख्या

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1.

निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडो के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 140 **(ii)** 156 **(iii)** 3825 **(iv)** 5005 **(v)** 7429

उत्तर 1:

(i) $140 = 2\times2\times5\times7 = 2^2\times5\times7$

(ii) $156 = 2\times2\times3\times13 = 2^2\times3\times13$

(iii) $3825 = 3\times3\times5\times5\times17 = 3^2\times5^2\times17$

(iv) $5005 = 5\times7\times11\times13$

(v) $7429 = 17\times19\times23$

प्रश्न 2.

पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मो के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM है।

(i) 26 और 91 **(ii)** 510 और 92 **(iii)** 336 और 54

उत्तर 2:

(i) 26 और 91

$26 = 2\times13$

$91 = 7\times13$

HCF = 13

LCM = $2\times7\times13 = 182$

दो संख्याओं का गुणनफल = $26\times91 = 2366$

HCF×LCM = $13\times182 = 2366$

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

(ii) 510 और 92

$510 = 2\times3\times5\times17$

$92 = 2\times2\times23$

HCF = 2

LCM = $2\times2\times3\times5\times17\times23 = 23460$

दो संख्याओं का गुणनफल = $510\times92 = 46920$

HCF×LCM = $2\times23460 = 46920$

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

(iii) 336 और 52

336 = 2×2×2×2×3×7 $= 2^4 \times 3 \times 7$

54 = 2×3×3×3 $= 2 \times 3^3$

HCF = 2×3 = 6

LCM $= 2^4 \times 3^3 \times 7$ = 3024

दो संख्याओं का गुणनफल = 336×54 = 18144

HCF×LCM = 6×3024 = 18144

इस प्रकार, दो संख्याओं का गुणनफल = HCF×LCM

प्रश्न 3.

अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्लिखित पूर्णांकों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए:

(i) 12, 15 और 21 **(ii)** 17, 23 और 29 **(iii)** 8, 9 और 25

उत्तर 3:

(i) 12, 15 और 21

12 = 2×2×3 $= 2^2 \times 3$

15 = 3×5

21 = 3×7

HCF = 3

LCM $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ = 420

(ii) 17, 23 और 29

17 = 1×17

23 = 1×23

29 = 1×29

HCF = 1

LCM = 17×23×29 = 11339

(iii) 8, 9 और 25

8 = 2×2×2 $= 2^3$

9 = 3×3 $= 3^2$

25 = 5×5 $= 5^2$

HCF = 1

LCM $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ = 8×9×25 = 1800

प्रश्न 4.

HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

HCF (306, 657) = 9

हम जानते हैं,

LCM × HCF = दो संख्याओं का गुणनफल

इसलिए,

$$\mathrm{LCM} = \frac{\text{दो संख्याओं का गुणनफल}}{\mathrm{HCF}} = \frac{306 \times 657}{9} = 22338$$

इसप्रकार, LCM (306, 657) = 22338

प्रश्न 5.

जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

उत्तर 5:

यदि कोई संख्या अंक 0 पर समाप्त हो सकती है, तो वह 10 से विभाजित होती है या दूसरे शब्दों यह संख्या 2 और 5 से विभाजित होगी।

क्योंकि 10 = 2 × 5

6^n का अभाज्य गुणनखंडन = $(2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$।

6^n के अभाज्य गुणनखंडन में 5 नहीं है। इसलिए 6^n, 5 से विभाजित नहीं होगा।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 6^n के गुणनखंड में 2 और 3 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है।

अतः, किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त नहीं हो सकती है।

प्रश्न 6.

व्याख्या कीजिए कि 7 × 11 × 13 + 13 और 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5 भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।

उत्तर 6:

भाज्य संख्याओं के दो से अधिक भाजक होते हैं।

दी गई संख्या = 7 × 11 × 13 + 13

$= 13 \times (7 \times 11 + 1)$

$= 13 \times (77 + 1)$

$= 13 \times 78$

$= 13 \times 13 \times 6$

इसप्रकार, इस संख्या के दो से अधिक भाजक (1, 6, 13 और ये संख्या) हैं। इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

अब दूसरी दी गई संख्या $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5 \times (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

$= 5 \times (1008 + 1)$

$= 5 \times 1009$

इसप्रकार, इस संख्या के दो से अधिक भाजक (1, 5, 1009 और ये संख्या) हैं। इसलिए यह एक भाज्य संख्या है।

प्रश्न 7.

किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

उत्तर 7:

रवि को 12 मिनट लगते हैं जबकि सोनिया को 18 मिनट लगते हैं एक समय बाद दोनों अपने प्रारम्भ स्थान पर होंगे और वह समय 12 और 18 का LCM होगा।

$18 = 2 \times 3 \times 3$ और,

$12 = 2 \times 2 \times 3$

12 और 18 का LCM $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

इसप्रकार, रवि और सोनिया 36 मिनट बाद दोनों अपने प्रारम्भ स्थान पर होंगे ।

गणित

पाठ–1 वास्तविक संख्या

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1.

सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 1:

माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$a = \sqrt{5}b$

$\Rightarrow a^2 = 5b^2$ ....(1)

अतः, 5, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, a को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $a = 5k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में a मान रखने पर,

$$(5k)^2 = 5b^2$$
$$\Rightarrow 5k^2 = b^2$$

अतः, 5, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, b को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2.

सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 2:

माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

उत्तर 3:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow 2a^2 = b^2$ ....(1)

अतः, 2, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, b को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $b = 2k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

$$3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-3\right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-3\right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3.

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6+\sqrt{2}$

उत्तर 3:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow 2a^2=b^2$ ....(1)

अतः, 2, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, b को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $b=2k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6+\sqrt{2}$

माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a}{b}-6=\frac{a-6b}{b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

गणित

पाठ–1 वास्तविक संख्या

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 1.

बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किये बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$ **(ii)** $\frac{17}{8}$ **(iii)** $\frac{64}{455}$ **(iv)** $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ **(vi)** $\frac{23}{2^3 5^2}$ **(vii)** $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ **(viii)** $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ **(x)** $\frac{77}{210}$

उत्तर 1:

(i) $\frac{13}{3125}$

$3125 = 5\times5\times5\times5\times5 = 5^5$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

3125 का अभाज्य गुणनखंडन = 5^5

क्योंकि यह गुणनखंडन 5^n के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा।

(ii) $\frac{17}{8}$

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

8 का अभाज्य गुणनखंडन = 2^3

क्योंकि यह गुणनखंडन 2^m के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा।

(iii) $\frac{64}{455}$

$455 = 4\times7\times13$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

455 का अभाज्य गुणनखंडन = 4×7×13

क्योंकि यह गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में नहीं है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(iv) $\frac{15}{1600}$

1600 = 2×2×2×2×2×2×5× = $2^6 5^2$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

1600 का अभाज्य गुणनखंडन = $2^6 5^2$

क्योंकि यह गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा।

(v) $\frac{29}{343}$

343 = 7×7×7 = 7^3

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

343 का अभाज्य गुणनखंडन = 7^3

क्योंकि यह गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में नहीं है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

हर = $2^3 5^2$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

हर का अभाज्य गुणनखंडन = $2^3 5^2$

क्योंकि यह गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा।

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

हर का अभाज्य गुणनखंडन = $2^2 5^7 7^5$

क्योंकि यह गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में नहीं है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा ।

(viii) $\frac{6}{15}$

$\frac{6}{15} = \frac{2\times3}{5\times3} = \frac{2}{5}$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

हर का अभाज्य गुणनखंडन = 5

क्योंकि यह गुणनखंडन 5^n के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा ।

(ix) $\frac{35}{50}$

$\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{2\times5\times5} = \frac{7}{10}$

हर = $10 = 2 \times 5$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

हर का अभाज्य गुणनखंडन = 2×5

क्योंकि यह गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत होगा ।

(x) $\frac{77}{210}$

$\frac{77}{210} = \frac{7\times11}{2\times3\times5\times7} = \frac{11}{30}$

हर = $30 = 2 \times 3 \times 5$

हम जानते हैं कि किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q सहअभाज्य हैं) में, यदि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो उसका दशमलव प्रसार सांत होता है।

हर का अभाज्य गुणनखंडन = $2 \times 3 \times 5$

क्योंकि यह गुणनखंडन $2^m 5^n$ के रूप में नहीं है, इसलिए इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

प्रश्न 2:

ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो सांत हैं।

उत्तर 2:

(i) $\frac{13}{3125}$

$$\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \frac{13}{5^5} \times \frac{2^5}{2^5} = \frac{13\times32}{(5\times2)^5} = \frac{416}{10^5} = 0.00416$$

(ii) $\frac{17}{8}$

$$\frac{17}{8} = \frac{17}{2\times2\times2} = \frac{17}{2^3} \times \frac{5^3}{5^3} = \frac{17\times125}{(2\times5)^3} = \frac{2125}{10^3} = 2.125$$

(iii) $\frac{64}{455}$

इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(iv) $\frac{15}{1600}$

$$\frac{15}{1600} = \frac{3\times5}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5} = \frac{3}{2^6\times5} \times \frac{5^5}{5^5} = \frac{3\times3125}{(2\times5)^6} = \frac{9375}{10^6} = 0.009375$$

(v) $\frac{29}{343}$

इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

$$\frac{23}{2^3 5^2} = \frac{23}{2^3\times5^2} \times \frac{5}{5} = \frac{23\times5}{(2\times5)^3} = \frac{115}{10^3} = 0.115$$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

(viii) $\frac{6}{15}$

$$\frac{6}{15} = \frac{2\times3}{3\times5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{2\times2}{2\times5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(ix) $\frac{35}{50}$

$\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{2\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10} = 0.7$

(x) $\frac{77}{210}$

इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

प्रश्न 3:

कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दिए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखंडो के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 43.123456789 **(ii)** $0.120120012000120000\ldots$ **(iii)** $43.\overline{123456789}$

उत्तर 3:

(i) 43.123456789

क्योंकि इसका दशमलव प्रसार सांत है, इसलिए, यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंडन 2^m5^n के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक हैं।

(ii) $0.120120012000120000\ldots$

क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत तथा अनावर्ती है, इसलिए, यह एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $43.\overline{123456789}$

क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत तथा आवर्ती है, इसलिए, यह एक परिमेय संख्या और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंडन में 2^m5^n के अतिरिक्त कोई और भी अभाज्य संख्या है।